$E=mc^2$
FÍSICA
TEÓRICA
DIEGO GÓMEZ FERNÁNDEZ

Índice

1. ¿Qué es la Física?

Introducción:

La Física es una ciencia que nos ayuda a comprender la naturaleza del universo de la manera más sencilla posible, a partir de demostraciones empíricas con la preciada herramienta de las matemáticas. La física persigue conocer el por qué ocurren los sucesos en la naturaleza.

Ya desde la antigüedad, los eruditos y grandes pensadores, comenzaron a describir el mundo que les rodeaba.

En Grecia, cuna del pensamiento occidental, los grandes pensadores como Sócrates, Platón y Aristóteles ya utilizaron las matemáticas para comprender el mundo.

No sería hasta la Edad Moderna, cuando poco a poco se fue desarrollando la mecánica clásica, gracias a grandes talentos como Isaac Newton, Johannes Kepler y Galileo Galilei. Estos tres geniales físicos crearon teorías que tras siglos se considerarían leyes, que nos permiten conocer el universo que nos rodea. No obstante, para ellos el universo funcionaba como si se tratase de un mecanismo de relojería.

Es admirable pensar que estos tres grandes científicos, consiguieron mediante la observación y su razonamiento, a partir de un modo matemático, unificar las leyes físicas que están establecidas en múltiples materias (ingeniería, electrónica…).

Gracias a la Ley de Gravitación Universal, las tres Leyes de la Dinámica, el principio de la Teoría de la Relatividad, el Oscilador Armónico Simple, la Óptica, la Mecánica Celeste se ha conseguido que nuestros conocimientos se amplíen aún más, desarrollando y perfeccionando nuestro entendimiento de este vasto universo.

Debido al principio de la Teoría de la Relatividad, enunciada por Galileo Galilei y su ayudante Domenico se generaron controversias, ya que los físicos de la época no se ponían de acuerdo a la luz de los ingeniosos experimentos realizados por ambos. Sin embargo, el célebre físico Albert Einstein consiguió dar una excelente explicación desde el año 1905 hasta 1915 a los problemas de la época estableciendo que el tiempo no era absoluto sino relativo. Esta gran teoría abrió un mundo entero de posibilidades para conocer mejor la realidad, abriendo las puertas para descubrir los agujeros negros, universos paralelos, ondas gravitacionales… En su tiempo generó muchas controversias debido a la gran dificultad que poseía al cambiar de manera radical el entendimiento de la física.

La mecánica cuántica se empezó a desarrollar a partir de la hipótesis de Max Planck en el año 1900, para la posterior construcción de la mecánica cuántica en 1925 y 1926, por los físicos más brillantes de la época. El objetivo de la compleja mecánica cuántica es comprender el mundo microscópico y los fenómenos que se dan en este, basados en la teoría matemática de la probabilidad. Esto ha sido corroborado empíricamente por numerosos experimentos, de los cuales han conseguido explicar el comportamiento ondulatorio de la materia, la incertidumbre a la hora de precisar la velocidad a la que se mueve una partícula y su posición, discontinuidades energéticas… La mecánica cuántica nos ofrece un punto de vista muy distinto y a la vez abstracto de la materia, ayudando a conseguir el sueño de la humanidad de terminar de comprender el universo. El físico Albert Einstein siempre fue escéptico con respecto la mecánica cuántica, argumentando su postura con la siguiente frase que invita a reflexionar: "Me gusta creer que la Luna esté ahí aunque no la esté mirando", en signo de protesta, ya que Albert Einstein creía que "Dios no jugaba a los dados". Albert Einstein sin embargo estaba a favor de los ideales del comportamiento ondulatorio de la materia, del excéntrico Erwin Schrödinger ya que chocaba con la teoría de Heisenberg. En la que por aquella época se produjo una de las batallas intelectuales más intensas de la Física, que enfrentaba el Principio de Incertidumbre de Werner Heisenberg y la del comportamiento de ondulatorio de la materia de Erwin Schrödinger.

Los padres fundadores de la Mecánica Cuántica fueron los siguientes: Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Max Born, Broglie, Dirac, Max Planck, Niels Born, Pascual Jordan…

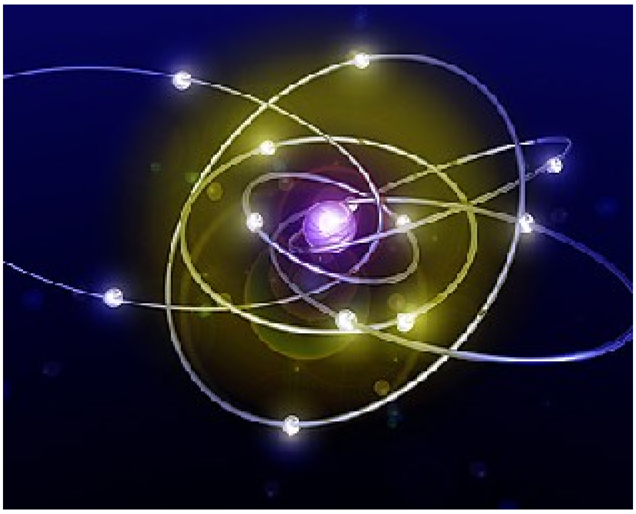
Pese a los innumerables avances que ha tenido la Física, la mecánica clásica no se ha quedado obsoleta, ya que está se sigue empleando para calcular las masas de los planetas, sus radios, aceleración de la gravedad y campos gravitatorios…

2. *¿Qué es la mecánica cuántica?*

La teoría cuántica nos ofrece una manera muy abstracta de comprender la naturaleza del universo microscópico, que se logra a través de cálculos matemáticos probabilísticos. Las leyes por la que esta se rige no responden a nuestra lógica y los fenómenos que acontecen en el mundo microscópico son invisibles a nuestros sentidos, ya que la naturaleza del mundo cuántico se basa en el azar. Según el propio Richard Feynman, uno de los grandes físicos teóricos del siglo XX, no existe nadie que sea capaz de comprender la mecánica cuántica por las complejidades y controversias que conlleva esta. Incluso sus propios creadores, la aborrecían por su vasta dificultad y lo confusa que puede llegar a ser en ciertos momentos.

2.1 *¿Los átomos son como creemos o es un mito?*

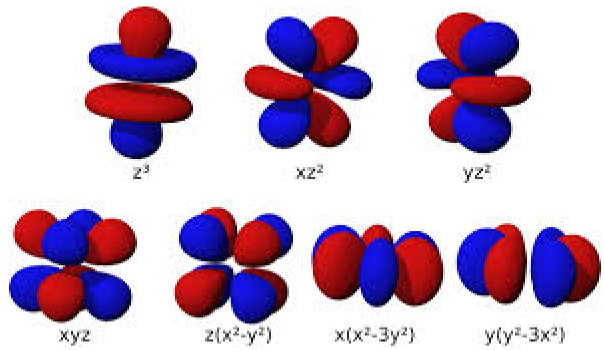
Todos alguna vez en nuestra vida, hemos oído hablar del modelo del Rutherford expuesto en 1897. Este modelo determina la realidad del átomo como si se tratase de un modelo planetario convencional, en el que el núcleo atómico está compuesto por partículas con electro carga positiva y neutral, denominada protón y neutrón respectivamente. Además el electrón, una partícula con electro carga negativa, orbita alrededor del núcleo atómico ya mencionado antes. Los físicos teóricos del siglo XX no tardaron mucho en contradecir este nuevo modelo; para entender por qué los físicos se opusieron a esta idea plantearé un experimento imaginario: Se supondrá una rueda común de bicicleta girando sobre sí misma alrededor de un eje en un recipiente lleno de agua. Esta rueda de bicicleta durante un cierto período de tiempo, irá removiendo el agua creando pequeñas olas hasta quedarse sin energía y pararse. En el mundo cuántico pasa algo muy parecido, debido a que los electrones orbitan con un movimiento acelerado en un campo electromagnético, irían perdiendo energía progresivamente y a causa de la pérdida de energía, el electrón terminaría cayendo describiendo una trayectoria en espiral, en la que colisionaría con el núcleo atómico desapareciendo el átomo por completo. Por lo tanto, la manera de interpretar correctamente la solución a este problema físico consiste en suponer que la posición del electrón está indefinida en varios lugares del espacio. Dicho de una manera coloquial, el electrón orbita de manera cuántica, es decir de una forma muy extraña ajena a lo que podemos presenciar, no como por ejemplo cuando la Tierra gira alrededor del Sol. Para resolver este problema, se emplea el concepto de orbital. El orbital es el grado de indeterminación que existe, al intentar encontrar al electrón en una posición determinada en el espacio. O dicho de una manera más técnica, el orbital es la distribución de probabilidad que supone encontrar al electrón en la región más probable en el espacio.



Cada electrón viene dado por cuatro números cuánticos, un factor que etiqueta el comportamiento del electrón en el átomo. Los números cuánticos se denotan por n, l, m_l, m_s:

- n: determina cuanta energía tiene el electrón (el primer nivel es el de menor energía y los siguientes que están más alejados del núcleo atómico tienen energías mayores), mida la distancia a la que se sitúa el electrón del núcleo atómico, y además también determina el volumen del orbital.
- l: la forma y la superficie del orbital y la energía de los subniveles en que se divide el nivel principal.
- m_l: la orientación espacial de los subniveles respecto al campo magnético.
- m_s: el hipotético giro del electrón alrededor de sí mismo.

Este es un ejemplo de una representación gráfica de los orbitales:



2.2 El gato de Schrödinger.

La teoría cuántica desafía a la intuición en el experimento mental propuesto por Erwin Schrödinger en 1935. Este experimento mental consiste en un gato encerrado en una caja, en el que existe un cincuenta por ciento de probabilidades de que al abrir la caja, un dispositivo radiactivo que puede causar que un martillo golpee a una cápsula de gas venenoso y el efecto de este gas mate al gato. El otro cincuenta por ciento de probabilidades de que al abrir la caja no se active el dispositivo radioactivo y el gato no muera. Por la tanto, el gato puede estar vivo y muerto al mismo tiempo debido a que el átomo se desintegra en una mezcla de estados. Las superposiciones cuánticas dejan de serlo en el momento en que se hace una medición de una partícula, de modo que, inmediatamente después de la apertura de la caja para mirar, el gato o estará vivo o muerto. Esto dicho de una manera más técnica se conoce como el colapso de la función de onda.

2.3 *Propiedades de la mecánica cuántica*.

1- La energía está *cuantizada*, es decir, que carece de la característica de ser una magnitud continua, por lo tanto la energía va a saltos y se concentra en paquetes discretos de energía denominados *cuantos*. Por ejemplo, si vas conduciendo un automóvil con una celeridad de ochenta kilómetros por hora, en la que aceleras el propio automóvil para ir a cien kilómetros por hora; se entiende que has ido pasando de ochenta a ochenta y un kilómetros hasta llegar a los cien. Pero en la realidad cuántica, pasarías directamente a la celeridad de cien kilómetros por hora.

2- Los fenómenos que se dan en la naturaleza del mundo cuántico podrían ser ocasionados por una partícula, o bien, por una onda (la onda se define como la agitación periódica no puntual que se propaga por el espacio, en la que se transporta energía sin que haya materia de por medio). En la mecánica cuántica esas dos entidades se unifican, formando la dualidad onda-partícula. Esto es algo que resulta totalmente extravagante, debido a que si realizamos experimentos veremos propiedades de la partícula o de la onda. En la teoría cuántica de Erwin Schrödinger se demuestra de manera contundente, que las partículas de los sistemas microscópicos están ligadas a las propiedades del movimiento ondulatorio. Quiere decir esto que el comportamiento de una partícula está ligado a una función de onda y a su vez esta función de onda $(\boldsymbol{\Psi})$permite verificar las características de la partícula, con su respectiva longitud de onda correspondiente. La fórmula matemática que describe el comportamiento del sistema es la ecuación de Schrödinger $\widehat{H}\psi = E_{\psi}$.

3- Las partículas en la física cuántica son ondas de probabilidad, que se dispersan por el espacio de manera no localizada, es decir, que las ondas están en todas las partes a la vez. Por tanto se deduce que el electrón no está orbitando, sino que está en todas partes.

4- Otra característica es que las magnitudes conjugadas, es decir, las magnitudes que tiene una relación directa entre ellas no se pueden medir a la vez y de forma exacta, como la velocidad y la posición o la energía y el tiempo. No es que la humanidad no haya creado el instrumental quirúrgico necesario, sino que es una limitación de la propia naturaleza del mundo cuántico, ya que cuando intentas medir dos magnitudes conjugadas, más exacta es una y más incierta es otra. Esta característica se conoce como el Principio de Incertidumbre, cuya descripción matemática es esta $\sigma_x\sigma_y \geq \frac{\hbar}{2}$

5- Una propiedad de la mecánica cuántica que parece pertenecer al planeta de la ciencia ficción, es que como había dicho, las partículas son ondas muy ``escurridizas´´, así podría incluso existir la probabilidad de que la partícula se filtre y aparezca al otro lado en un lugar del espacio distinto. Algo así como atravesar una pared. A esto se le conoce como efecto túnel.

6- Como las partículas pueden estar en varios estados cuánticos a la vez y dependen las unas de las otras, podremos suponer que dos partículas independientes la una de la otra, se puedan mandar información entre ellas estén a las distancia a la que estén. Esto se conoce como entrelazamiento cuántico.
Paul Dirac demostró matemáticamente que tanto el principio de incertidumbre de Heisenberg, como la teoría cuántica de Erwin Schrödinger eran válidos.

7- Niels Bohr propuso en 1913 que los espectros atómicos se crean cuando los átomos emiten o absorben diferentes longitudes de onda de la luz al saltar los electrones de una órbita a otra. El problema surgió cuando las mediciones del espectro del hidrógeno no coincidían con la teoría de Bohr. Paul Dirac resolvió este problema combinando las ecuaciones ondulatorias de la mecánica cuántica con la descripción matemática de las partículas que se mueven a velocidades cercanas de la luz que, se encuentran en la teoría de la relatividad especial, incorporando el hecho de que el electrón posee un espín en una estructura relativista. El resultado pue una ecuación de onda cuántica relativista que se conoce como la ecuación de Dirac.

3. La teoría de la relatividad especial

Introducción:

La teoría de la relatividad especial está basada en cómo perciben los observadores el mismo suceso. Por ejemplo, si Juan le lanza una pelota a Isabel, Juan verá como la pelota se aleja de él e Isabel presenciará como la pelota se le acerca, esto se conoce como movimiento relativo. En el movimiento relativo, las leyes de la Mecánica Clásica no son compatibles con las transformaciones de Galileo, aunque a nuestros sentidos les parezca que sí. Debido a que en aquella época, todos los fenómenos ondulatorios de la naturaleza estudiados, como puede ser el sonido, las olas… necesitaban un medio material por el que propagarse, así que la comunidad científica llegó al consenso de la existencia de un medio en el que las ondas electromagnéticas se propagan: El éter. El éter tomó el papel de sistema de referencia absoluto, no dudaron otorgarle el protagonismo en fenómenos gravitatorios y electromagnéticos. (Un dato curioso es que la luz visible es una parte del espectro de las ondas electromagnéticas donde incluyen las ondas de radio, ultravioleta, los rayos X y los rayos gama.) El éter se definía como una sustancia inmaterial, que se disipa por el universo y puede fluir libremente por todos los cuerpos. Interpretando las ondas luminosas como oscilaciones del éter, se concluyó que su velocidad era constante. En 1875, Maxwell propuso una experiencia para medir el movimiento absoluto de la Tierra a través del éter sabiendo entonces que la Tierra se mueve. La Tierra se debería encontrar en lo que se denominó como “viento de éter´´, que hará que un observador en la superficie obtenga distintos valores para la velocidad de la luz, si la mide en distintas direcciones respecto al viento de éter. Michaelson y Morley realizaron un experimento cuyo objetivo era medir esa diferencia de velocidad con respecto a éter. El experimento no salió como esperaban. De tal manera que la Mecánica Newtoniana, es una generalización de la Teoría de la Relatividad Especial, respecto a velocidades bajas.

Galileo Galilei enunció junto con su discípulo Doménico, lo que se convertiría el principio de la teoría especial de la relatividad. Galileo Galilei ideó un sistema matemático (transformaciones de Galileo Galilei) para estudiar este fenómeno, que consiste en colocar dos sistemas de referencia (unos ejes de coordenadas, en este caso se refiere a un eje tridimensional) uno al lado del otro para medir el movimiento de un cuerpo. Este modelo matemático verificaba que cuando un cuerpo se mueve, experimenta un cambio de posición en el que el tiempo es absoluto y como consecuencia las velocidades se suman. Este principio matemático parecía que respondía a la lógica, hasta la llegada del físico teórico Maxwell con su unificación de la electricidad y el magnetismo con cuatro ecuaciones matemáticas. Dichas ecuaciones verificaban que la luz era una onda electromagnética. Dado que las ecuaciones de Maxwell gobernaban la luz, no parecían encajar con el principio de relatividad de Galileo Galilei. Entonces, ¿quién llevaba razón Galileo Galilei o Maxwell? Para llegar a la conclusión de este debate, vamos a suponer un experimento imaginario en el que Juan va subido encima de un tren que viaja una velocidad uniforme. Si Juan lanza una bola desde el tren, es obvio pensar que la velocidad de la bola será la suma de la velocidad del tren más la propia bola. ¿Pero y si Juan mientras va subido en el tren con una linterna emite un rayo de luz, entonces esto quiere decir que la velocidad será la suma de la velocidad del rayo de luz más la del tren? ¿Si la velocidad de la luz no se puede superar? ¿Quiere decir esto que la luz no sigue las leyes del movimiento de los cuerpos, que viajan a velocidades mucho menores que la de la luz? Lorentz fue un destacado matemático en su época, que supo dar salida a la contradicción que existía entre Maxwell y Galileo Galilei; ya que él dedujo que los principios en los que se apoyaba las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, seguían otra serie de criterios que los que expuso Galileo Galilei con su principio de la teoría de la relatividad. Para comprender la resolución de este problema físico, antes tendremos que entender las transformaciones del matemático Lorentz. Las transformaciones de Lorentz no son más que una herramienta matemática que sustituyen las transformaciones de Galileo Galilei. Con ellas las leyes del electromagnetismo sean fijas independientemente del observador que presencie el evento. Albert Einstein interpretó que el tiempo no era absoluto sino relativo, es decir, que el tiempo para un observador es distinto al que percibe otro observador. Por lo tanto, Albert Einstein dedujo que el tiempo era una dimensión y no un parámetro, en la que se unifica con el espacio para crear el espacio-tiempo.

3.1 *Postulados de Albert Einstein*.

1- Todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes. Lo que dice este postulado es lo siguiente: si dos observadores notan que se mueve el uno respecto del otro, no se puede determinar si uno está parado y el otro no, o ambos se mueven. Por lo tanto, no se puede corroborar con ningún experimento científico si se mueve un observador con velocidad uniforme o el otro está parado. Lo que sí se podría comprobar es que uno se mueve respecto a otro con velocidad uniforme.
2- esté en reposo o en movimiento. Simplemente es que todo rayo de luz se va a mover siempre a la misma velocidad, esto ya no depende del observador.

3.2 *¿Por qué la luz se puede propagar por el vacío?*

Muchas veces nos hemos preguntado por qué en las películas como Stars Wars, el sonido se puede propagar por el espacio o el vacío; pero lamento decir que esto no es así en la realidad, ya que el sonido es una onda de presión acústica que necesita un medio material para desplazarse. ¿Pero entonces, por qué la luz sí puede hacerlo? Pues bien, la respuesta de esto no es del todo sencilla pero no es imposible. La luz realmente es una onda electromagnética, ahora bien, para entender esto tenemos que saber que el campo magnético en realidad no existe, simplemente es un efecto relativista del campo eléctrico (el campo eléctrico es el resultado del fluido de la corriente eléctrica) que provoca un fuerza invisible que interactúa con las partículas. La onda electromagnética se propaga debido a la oscilación de los campos (eléctrico y magnético) de tal manera que no necesita ningún medio vibrante. Son los propios campos los que ``vibran´´ y se van generando mientras la onda va avanzando. El campo $\vec{E}$ cambia en el tiempo y eso genera un campo $\vec{B}$, que a su vez varía, y se genera otra vez el campo $\vec{E}$. Así la onda se va propagando por el vacío. Un ejemplo para entender esto es, imaginarse como los sistemas manuales de vagonetas donde dos personas tenían que realizar un esfuerzo para desplazar la vagoneta.

3.3 ¿*<u>Por qué no se puede superar la velocidad de la luz en el vacío</u>*?

La velocidad de la luz constante en el vacío supone un límite de velocidad establecido en el universo, por lo tanto no se puede superar. Una de las razones primordiales que expone por qué no se puede superar, es imaginando un sistema de coordenadas desplazándose a una velocidad superior a la de la luz constante por el vacío partiendo desde el reposo, respecto a un observador. Este observador no vería la longitud de la partícula yendo a semejante velocidad, debido a que el espacio y tiempo se hubiese deformado tanto, que el tiempo no fluiría para ese cuerpo. Además de que la fuerza necesaria y la energía se distribuyan para que esa partícula se mueva sería infinita; lo cual tiende sin lugar a duda al absurdo. Si eso se analiza desde un punto de vista matemático con las transformaciones de Lorentz, superar la velocidad de la luz conllevaría una expresión del tiempo imaginaria, no real.

3.4 ¿*Por qué el tiempo se dilata y el espacio se curva*?

La explicación a por qué el tiempo se dilata viene dada por la velocidad de la luz constante en el vacío. Para que esto sea cierto es necesario suponer que el tiempo es relativo. Debido a esto, cada observador experimenta su propio tiempo cuando viaja con un movimiento uniforme, de tal modo, que cuando un observador se mueve a una mayor velocidad su tiempo propio pasa más lento. Para dar la respuesta a por qué el espacio se curva, se propondrá un experimento imaginario. Imagínese que Isabel está parada y presencia como su amigo Juan, da vueltas alrededor de un planeta con una nave espacial. La percepción del espacio-tiempo de Isabel será muy distinta a la que tiene Juan, ya que por el simple hecho de que Juan se esté moviendo las consecuencias de la relatividad especial se hacen notar. En este caso aparece la contracción de Lorentz, puesto que la distancia recorrida por la nave espacial de Juan en la dirección de su viaje se acorta. Por lo tanto, la trayectoria circular que describe Juan en su nave se acorta, mientras que Isabela que está parada ve exactamente igual espacio recorrido por Juan desde su punto de partida. ¿Entonces esto quiere decir, que la longitud de la circunferencia se ha contraído junto con su diámetro? La respuesta es no, sólo se reduce el perímetro; sin embargo el diámetro no lo hace, puesto que la contracción del espacio ocurre en la dirección del viaje y no en las laterales. O sea que, tenemos un diámetro demasiado largo para la longitud de la circunferencia, pero si forzamos el empalme, el diámetro no se va a quedar contenido en un plano, dado que no entra y por ende se termina curvando. Se deduce que el observador Juan con un movimiento acelerado, presencia que el espacio de su alrededor se curva para que se pueda desplazar. Si analizamos matemáticamente el problema, nos damos cuenta que la relación entre el diámetro y la circunferencia anteriormente nombrados no es proporcional y como consecuencia, el número pi sufre una variación en su valor.

3.5 Resolución de la paradoja de los gemelos.

Para resolver la paradoja de los gemelos, es necesario tener en cuenta que el movimiento es relativo. Para ello supondremos un experimento imaginario en donde tendremos a dos hermanos gemelos, llamados José y Alberto. José que es un reconocido astronauta por la NASA, decide emprender un viaje de ida y vuelta solo en una nave espacial que viaja casi a la velocidad de la luz constante por el vacío, mientras que su hermano gemelo Alberto lo espera en el planeta Tierra. El viaje de José dura cinco años, viajando casi a la velocidad de la luz constante por el vacío el tiempo pasa más rápido para Alberto que para José, y así José es más joven que su hermano gemelo. Pero un momento, ¿no habíamos dicho que para resolver esta paradoja habíamos establecido que el movimiento es relativo para ambos hermanos? Por lo tanto, José tendría el mismo derecho de decir que Alberto se ha alejado de él y que él mismo estaba parado, puesto que el tiempo se dilataría para Alberto, que es lo mismo que decir que Alberto sería más joven que José. Por consiguiente, sabemos que el movimiento relativo opera con observadores que se mueven a velocidades uniformes independientes el uno del otro, de tal manera que no hay ambigüedad en el movimiento. Esto quiere decir, que los observadores que se están desplazando con una velocidad uniforme independiente de la del otro, tienen derecho a decir que el otro observador está parado. Pero, ¿ y si planteamos el problema de una forma distinta, estableciendo que el viaje de José en la nave se desplaza con un movimiento acelerado respecto Alberto, para que se pueda diferenciar quien se mueve respecto a quién? Ahora sí se puede verificar que el tiempo pasaría más lento para José que viaja en una nave a la velocidad de la luz constante por el vacío que para Alberto, por lo que nos queda que José sería bastante más joven que su propio hermano gemelo. Matemáticamente hablando la paradoja de los gemelos se apoya en esta ecuación $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

3.6 ¿Qué relación existe entre la energía de un cuerpo y su masa?

Antes de entender por qué existe una relación entre energía y masa, es necesario saber con antelación que la masa de un cuerpo según la teoría de la relatividad especial se define como el contenido de energía de un cuerpo. Albert Einstein demostró que da igual con cuánta energía empieces al acelerar en un tramo debido que cuanto más aceleres al principio, mayor será la masa del cuerpo, de modo que más le costará acelerar. Ergo cuando aumenta la energía de un cuerpo al acelerar también aumenta su masa, es decir, la equivalencia de masa y energía que viene dada por la ecuación más famosa de todos los tiempos $E = mc^2$.

4. Introducción de la teoría de la relatividad general.

Este principio fue enunciado por Albert Einstein en el año 1915. Consiste en que las magnitudes espacio y tiempo, adquieren carácter dimensional representando la realidad en cuatro dimensiones. Al que se le denominó espacio seudoeuclídeo bidimensional, es decir, la típica manta que en los experimentos que se ven en la tele simboliza el espacio y tiempo. Unificando este como la línea del espacio-tiempo, de la que hemos escuchado todos hablar. En este principio, la órbita de un planeta no se describe de manera convencional, sino que la masa de los cuerpos celestes altera la línea del espacio-tiempo o en la manta haría un surco. El Sol al tener mucha más masa que la Tierra, desvía a esta de su movimiento rectilíneo uniforme respecto al Sol. Este suceso haría que el Sol crease un surco en la línea del espacio-tiempo o la manta, haciendo que la propia Tierra gire en torno al Sol. Por supuesto, hay que suponer que los cuerpos celestes se están precipitando al vacío de manera indefinida. Ese principio sirvió para resolver lo que la mecánica Newtoniana no pudo, la órbita irregular de Mercurio. Generalmente la teoría de la relatividad general explica que el espacio le dice a la materia cómo debe moverse y la materia al espacio cómo debe curvarse.

5. *Apéndice matemático*.

5.1 *Oscilador Armónico Simple o Movimientos Vibratorios Armónicos Simples (M.A.S)*

La utilidad del Oscilador Armónico Simple, es sencillamente determinar las características y el comportamiento de la partícula cualquiera, a partir de su período de oscilación respecto a un punto de elongación. Consiste en la representación gráfica en un eje de coordenadas cartesiano, para que así sea más fácil medir sus variables y otorgar una mayor visibilidad a la hora de interpretar la partícula. Se rige por tres normas básicas:

1- El movimiento es periódico, es decir, en intervalos de tiempo iguales la partícula adquiere una misma posición velocidad y aceleración.

2- El movimiento oscila alrededor del punto de equilibrio.

3- La máxima separación de la partícula respecto al eje x, se denomina amplitud.

Ejemplos: un ejemplo básico es la vibración que tiene una regla cuando la agitamos, cuando ejercemos una fuerza en la cuerda del arpa, o las vibraciones de las cuerdas vocales cuando hablamos.

Simbología:

A-Amplitud: distancia máxima que adquiere la partícula respecto a su punto de elongación. Se mide en m. por el S.I.

x(t)- Elongación: distancia en cada instante respecto al punto central O.

v o f- Frecuencia: mide el número de oscilaciones de la partícula por unidad de tiempo. Se mide en $s^{-1} y\ Hertzios$.

T- Período: el tiempo necesario para que se produzca una oscilación.

ω- frecuencia angular: representa la velocidad angular constante de un movimiento circular (La velocidad angular, es el ángulo girado por el vector de posición por unidad de tiempo. Se mide en rad/s.

φ- Fase inicial: es el instante de vibración dela partícula, cuando empezamos a contar el tiempo (t=0)

ωt + φ- Fase: mide la distancia recorrida por la partícula cuando hay un instante de vibración.

5.2 *Ecuaciones del oscilador armónico simple*.

Para calcular la elongación respecto un parámetro temporal, se usa esta ecuación:

$$x(t)= A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

La trigonometría se aplica aquí, debido a que se emplea un triángulo rectángulo imaginario para medir la posición de la partícula cuando va a completar una vuelta en la circunferencia. La (ωt) determina el espacio angular resultante que va cambiando con el instante de vibración de la partícula (φ), lo que produce a su vez las ondas. A partir, de las condiciones iniciales de velocidad, frecuencia angular y posición, se deduce la amplitud.
La función seno repite su valor cuando su argumento o fase, aumenta en 2π radianes (Constante angular establecida en matemáticas, para indicar que se completa un período completo de una circunferencia), ya que existe una relación directa con su período y su frecuencia angular.

$$x_{1=X\,(t_1)=}\, A\, sen\,(\,\omega t_{1+}\,\varphi) = A\, sen\,[\omega\,(t_{1+}\,T) +\,\varphi]$$

La amplitud no se pone, ya que si la fase del seno es constante $(sen\ 2\pi)$ la A=1.

$$sen\,(\omega t_1 +\,\varphi) = sen\,(\,\omega t_1\,+\,\omega T +\,\varphi)$$

Por lo tanto, se verifica lo siguiente:

$$\omega T = 2\pi$$

Se despeja:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Si finalmente expresamos la ecuación en función de su período y frecuencia, aplicando métodos de sustitución de sistemas de ecuaciones:

$$x(t) = A\, sen\, (\,\omega t + \,\varphi) = A\, sen\, \left(\frac{2\pi}{T} t + \,\varphi\right) = A\, sen\, (\,2\pi\nu t + \,\varphi)$$

A continuación para expresar matemáticamente la velocidad de un (M.A.S) se deriva la anterior ecuación:

$$v(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\, cos(\,\omega t\, +\, \varphi)\omega = A\omega\, cos(\,\omega t + \varphi) = \pm A\omega\,\sqrt{1 - sen^2\,(\omega t + \varphi)} =$$
$$\pm\omega\,\sqrt{A^2 - A^2 sen^2(\omega t + \varphi)} = \,\pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Desde el paso dos al tres, hay que aplicar la razón trigonométrica fundamental

($sen^2\,\varphi + cos^2\varphi = 1$). *El sentido del más-menos, es que la partícula se desplaza tanto a la derecha como a la izquierda del punto cero del eje de coordenadas cartesiano y se coloca en la ecuación debido a que el seno al estar elevado al cuadrado, sería por así decirlo como una ecuación de segundo grado. Al realizar esta ecuación hay que dar dos soluciones con el más-menos y en el último paso cuando* $[A^2\, sen^2(\omega t + \varphi)]$ *lo sustituyes por la elongación al cuadrado (* x^2*).*

Para obtener su aceleración derivas su velocidad:

$$a(t) = \,\dot{v} = \ddot{x} = -A\omega\, sen\,[(\,\omega t + \,\varphi)]\,\omega = \,-A\,\omega^2 sen\,(\omega t + \,\varphi) = \,-\omega^2 x$$

En este caso la expresión de la velocidad máxima y aceleración máxima de una partícula en el oscilador armónico simple se escribe de la siguiente manera:

$x = 0$

$$\left|\begin{array}{l} sen\,(\omega t + \varphi) = 0 \\ \cos\,(\omega t + \varphi) = \pm\,1 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} a = 0 \\ v_{Máx} = \pm A\omega \end{array}\right|$$

$x = \pm A$

$$\left|\begin{array}{l} sen\,(\omega t + \varphi) = \pm 1 \\ \cos\,(\omega t + \varphi) = 0 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} a_{Máx} = \mp A\omega^2 \\ v = 0 \end{array}\right|$$

Funciones para entender esta situación tienes que tener en cuenta las ecuaciones de velocidad y aceleración del oscilador*, en la que simplemente tienes que sustituir con los valores* **(X=0;**

X=±A).

No solamente una partícula puede oscilar alrededor de un punto y la posición ser una función armónica (patrones regulares de ondas senoidales que empiezan desde el origen O) en el tiempo, sino también puede oscilar alrededor de un campo electromagnético, campo eléctrico etc. Estas son variables dadas en que delimitan progresiones armónicas de la naturaleza, pero que obedecen la reglas que antepones el oscilador armónico simple.

Simbología:

ψ- El valor de un magnitud en un instante en el punto donde esta varía (una especie de elongación, en la que ya no parte desde el origen O)

ψ_0- El valor máximo que puede tomar esa especie de elongación (es como una especie de amplitud, solo que ya no mide la distancia máxima a partir del origen O)

ωt + φ - tiene el mismo significado que anteriormente.

Es exactamente la misma ecuación del (M.A.S), pero con las modificaciones pertinentes:

$$\psi(t) = \psi_0\, sen\,(\omega t + \varphi)$$

Ahora vamos a añadir una variable en la que la magnitud dada pueda variar armónicamente sólo en valores positivos. Esta nueva variable queda delimitada con la letra griega ε_o en la ecuación:

$$\psi = \varepsilon_0 + \psi_0\, sen\,(\omega t + \varphi)$$

En este caso $\varepsilon_0 > \psi_0$, ya se representan valores positivos en la función armónica. Los valores máximo y mínimo de ψ quedan representados de la siguiente manera:

$$\psi_{Máx} = \varepsilon_0 + \psi_0$$
$$\psi_{Mín} = \varepsilon_0 - \psi_0$$

5.3 Construcción de Fresnel.

La construcción de Fresnel consiste en la composición de varios movimientos vibratorios armónicos de la misma frecuencia y dirección que se dan en la naturaleza. Por ejemplo, cuando golpeamos a una mesa con una regla esta emite un período de vibración de la misma frecuencia en la que se desplaza en la misma dirección. En este caso demostraremos que se produce un movimiento armónico simple de la misma frecuencia:
Como son varios movimientos, vamos a disponer de dos ecuaciones del oscilador armónico simple, que por supuesto van a tener la misma frecuencia angular:

$$x_1 = A_1\, sen\, (\, \omega t + \varphi_1) \qquad\qquad x_2 = A_2\, sen\, (\omega t + \varphi_2)$$

Ahora vamos a tener en cuenta, que si sumamos esas dos ecuaciones obtendremos el desplazamiento resultante de la partícula. Para ello emplearemos el teorema de adición, en este caso cuando se cumple que la condición de que $sen\,(a+b) = sen\, a \cos b + sen\, b \cos a$:

$$x = x_1 + x_2 \;=\; A_1\, sen\, \omega t\, cos\, \varphi_1 +\; A_1\, cos\, \omega t\, sen\, \varphi_1 +\; A_2\, sen\, \omega t\, cos\, \varphi_2 \;+ A_2\, cos\, \omega t\, sen\, \varphi_2$$

En el siguiente paso para simplificar matemáticamente esta expresión, solo tendremos que sacar factor común a $sen\, \omega t$ y a $\cos \omega t$ de esta manera:

$$x = sen\, \omega t\; (\, A_1\, cos\, \varphi_1 + A_2\, cos\, \varphi_2) + cos\, \omega t\; (\, A_1\, sen\, \varphi_1 +\; A_2\, sen\, \varphi_2)$$

Si nos fijamos con atención podemos encontrar dos entidades matemáticas (A y φ) en el factor común, que cumplen las siguientes condiciones:

$$A\, sen\, \varphi =\; A_1\, sen\, \varphi_1 \;+\; A_2\, sen\, \varphi_2$$

$$A\, cos\;\, \varphi =\;\; A_1\, cos\, \varphi_1 +\; A_2\, cos\varphi_2$$

A partir de esto ya se puede calcular la tangente de la fase inicial:

$$tg\; \varphi = \frac{A_1\, sen\, \varphi_1 +\; A_2\, sen\, \varphi_2}{A_1\, cos\, \varphi_1 +\; A_2\, cos\, \varphi_2}$$

A continuación, sumando las anteriores ecuaciones y elevándolas al cuadrado obtenemos:

$$A^2(\, sen^2\varphi +\; cos^2\varphi) =\; A_1^2\; (\, sen^2\; \varphi_1 +\; cos^2\; \varphi_1) + 2A_1\, A_2\; (\, sen\, \varphi_1\; sen\, \varphi_2 + cos\, \varphi_1\, cos\, \varphi_2) +$$
$$+A_2^2\; (\, sen^2\varphi_2 +\; cos^2\; \varphi_2)$$

Después aplicando lo anterior a una propiedad vectorial ($s^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos\varphi$), para verificar que van en la misma dirección habrá que suponer que las amplitudes tienen un comportamiento vectorial:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\, cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Sustituyendo los valores con los que hemos trabajado anteriormente, con la Construcción de Fresnel, sabiendo el teorema de adición:

$$x = A\, sen\, \omega t \cos\varphi + A \cos\omega t\, sen\, \varphi$$

$$x = A\, sen\, (\omega t + \varphi)$$

Por lo tanto deducimos, que podemos concluir con una ecuación de la composición de ***n*** movimientos vibratorios armónicos y de la misma frecuencia. Con la composición de ***n*** movimientos vibratorios, se refiere a ***n*** vectores libres respecto al vector unitario *i*; que determina una sucesión creciente desde el uno indicando los números de vibraciones armónicas posibles, para posteriormente poder medir todas sus variables respecto al eje de abscisas. Entonces la ecuación quedaría:

$$x_i = A_i\, sen\, (\omega t + \varphi)$$

$$i = (1,2,3, \dots, n)$$

Que dará como resultado, la aplicación una vez más del teorema de adición en el que tienes que usar una construcción geométrica de n vectores libres (un sumatorio), para medir todas las variables de esta construcción:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = sen\, \omega t \sum_{i=1}^{n} A_i\, cos\, \varphi_i + cos\, \omega t \sum_{i=1}^{n} A_i\, sen\, \varphi_i = A\, sen\, (\omega t + \varphi)$$

Para medir la tangente de la fase inicial, tenemos que tener en cuenta los conocimientos previos adquiridos usando los sumatorios con las razones trigonométricas pertinentes, sin olvidarnos del vector unitario i:

$$tg\ \varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\ sen\ \varphi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i\ cos\ \varphi_i}$$

Finalmente para hallar el valor de la amplitud, elevamos las ecuaciones al cuadrado empleando la estructura de una propiedad de vectores $s^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2cos\varphi$; conociendo antes que para crear la ecuación general de la amplitud, sabemos que la partícula resultante se moverá por el eje de coordenadas cartesiano, por ende se añade el vector unitario j. Este vector cumple la misma función que el de i, pero representa el eje Y:

$$A^2 = \sum_{i=1;j=1}^{n} A_{i;j}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cos\ (\varphi_i - \varphi_j)$$

5.4 *Variables en la construcción de Fresnel*.

1. En este caso para calcular la variable, antes debemos saber la diferencia de fase que es 2Kπ cuando K $\in Z$; en este momento K es la constante recuperadora de la ley de Hooke y Z se refiere al conjunto de números enteros. Lo que significa la diferencia de fase en esta situación, es que la partícula cuando se desplaza por el eje de coordenadas cartesiano en el instante inicial pasa por el origen y se dirige hacia a arriba, mientras tanto la segunda hará lo mismo que la primera.

Si el valor es cos $2K\pi = 1$, la amplitud tomará el siguiente valor:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1^2A_1^2 = (A_1 + A_2)^2 \rightarrow A = A_1 + A_2$$

Obviamente la amplitud deja de estar elevado al cuadrado, debido a que hay que colocarlo en la ecuación del oscilador en la que esta no está elevada al cuadrado:

$$x = (A_1 + A_2)\ sen\ (\omega t + \varphi)$$

2. Para hallar la segunda variable, la diferencia de fase tomará el valor $(2K + 1)\pi$ cuando (K $\in Z$). Lo que quiere decir esta parte, es que la partícula cuando se desplaza por el eje de coordenadas cartesiano pasa por

el origen y se dirige hacia arriba, mientras que la segunda pasará por el origen y se dirigirá hacia abajo.

Si equivale al $\cos\ (2K+1)\pi = -1$, el valor de la amplitud es:

$$A^2 = A_1^2 + A_1^2 - 2A_1^2 A_2^2 = \ (A_1 - A_2)^2 \rightarrow \ A = A_1 - A_2$$

Si $A_1 > A_2$, dando como solución la amplitud mínima y la diferencia de amplitudes, quedando así la ecuación resultante:

$$x = (A_1 - A_2)\ sen\ (\omega t + \varphi)$$

3. Para dar lugar a la tercera variable, la diferencia de fase toma el valor $(2K+1)\frac{\pi}{2}$ cuando (K$\in Z$). En esta situación los dos movimientos vibratorios, suceden en la misma cuadratura; al ser el valor $(2K+1)\frac{\pi}{2} = 0$ la amplitud es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

Entonces para hallar la tangente de la fase inicial:

$$tg\ (\varphi_1 + \phi) = \frac{sen\ (\varphi+\phi)}{cos\ \ (\omega+\phi)} = \frac{sen\ \varphi\ cos\ \phi + sen\ \phi\ cos\ \varphi}{cos\ \varphi\ cos\ \phi - sen\ \varphi\ sen\ \phi} = \frac{\frac{sen\ \varphi\ cos\ \phi + sen\ \phi\ cos\varphi}{cos\ \varphi\ cos\ \phi\ \ cos\ \phi\ cos\ \varphi}}{\frac{cos\ \varphi\ cos\ \phi - sen\ \varphi\ sen\ \phi}{cos\ \varphi\ cos\ \phi\ \ cos\ \varphi\ cos\ \phi}} = \frac{tg\ \varphi + tg\ \phi}{1 - tg\ \varphi\ tg\ \phi} = tg\ \varphi$$

Ahora sustituimos $\frac{A_2}{A_1} = tg\ \phi$:

$$tg\ \varphi = \frac{tg\ \varphi + \frac{A_2}{A_1}}{1 - \frac{A_2}{A_1}\ tg\ \varphi} = tg\ (\varphi_1 + \phi)$$

Entonces nos queda:

$$\varphi = \varphi_1 + \phi = \ \varphi_1 + arctg\ \frac{A_2}{A_1}$$

Por lo tanto la vibración armónica que nos queda, sería simplemente añadir estos valores obtenidos a la ecuación principal del oscilador armónico simple:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\, sen\ (\omega t + \varphi_1 + \phi)$$

Para finalizar, la última variable consiste en que las dos amplitudes sean totalmente iguales $(A_1 = A_2 = a)$, por lo tanto la amplitud resultante toma el valor de $\left(A = a\sqrt{2}\right)$. La diferencia de fase sería $\varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{4}$, con lo que la vibración resultante consistiría construir la ecuación como en el paso anterior:

$$x = a\sqrt{2}\, sen\ (\omega t + \varphi) = a\sqrt{2}\, sen\ (\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{4})$$

5.5 *Serie de Fourier*.

La serie de Fourier, nos permite medir la composición de movimientos vibratorios armónicos de la misma dirección y distinta frecuencia, que acontecen en el universo que nos rodea. Esto tiene muchas aplicaciones en el mundo de la mecánica cuántica, debido a que este modelo matemático se emplea para medir las superposiciones (dos movimientos de una partícula distintos que ocurren de manera simultánea) de varias oscilaciones de frecuencia y amplitud cuando el proceso es periódico, aunque muchas veces no tenga armonía. Un ejemplo para lo que sirve esta serie es, para cuantificar los saltos que dan los electrones al pasar de órbita en órbita. Un ejemplo que se da en la vida real, es cuando un músico toca un violín y otro músico distinto toca una guitarra. La dirección del sonido que ejerce el violín y la guitarra es la misma, sin embargo ninguno de los dos instrumentos suenan igual.

Al tratar con una composición de movimientos vibratorios, nos referimos a varios movimientos, por lo tanto en este caso operaremos con dos ecuaciones del oscilador armónico simple:

$$x_1 = A_1\, sen\ (\omega_1 t + \varphi) \qquad\qquad x_2 = A_2\, sen\ (\omega_2 t + \varphi)$$

Sabiendo de antes:

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad y \quad \omega_2 = 2\pi\nu_2 = \frac{2\pi}{T_2}$$

El movimiento resultante obedecerá, a la suma de ambas ecuaciones:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\, sen\,(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\, sen\,(\omega_2 t + \varphi_2)$$

El movimiento en cuestión, deja de ser periódico si el cociente entre ($\frac{\omega_1}{\omega_2}$) no da como resultado un número racional, obviamente no sería un movimiento periódico. En todo caso de que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$ $(n_1\, y\, n_2\, son\, números\, primos\, entre\, sí)$ el movimiento sería periódico y su período tiene el valor: $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$. A continuación, le volveremos a añadir un período al tiempo en la ecuación para que nos del valor de la elongación (x). Para ello empezaremos con la elongación prima (x'):

$$\begin{aligned} x' &= A_1\, sen\left[\frac{2\pi}{T_1}\,(t + n_1 T_1) + \varphi_1\right] = A_2\, sen\left[\frac{2\pi}{T_2}\,(t + n_1 T_1) + \varphi_2\right] \\ &= A_1\, sen\left[\frac{2\pi}{T_1} t + \frac{2\pi n_1 T_1}{T_1} + \varphi_1\right] + A_2\, sen\left[\frac{2\pi}{T_2} t + \frac{2\pi n_2 T_2}{T_2} + \varphi_2\right] \\ &= A_1\, sen\left[\frac{2\pi}{T_1} t + 2\pi n_1 + \varphi_1\right] + A_2\, sen\left[\frac{2\pi}{T_2} t + 2\pi n_2 + \varphi_2\right] \\ &= A_1\, sen\,(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\, sen\,(\omega_2 t + \varphi_2) = x \end{aligned}$$

En efecto, ahora nuestro objetivo es simplemente que todo número irracional que pueda dar como resultado, se aproxime todo lo posible al cociente entre dos números primos. Donde ahora sí podemos exponer que la agrupación de movimientos vibratorios armónicos, que tienen la misma dirección y distinta frecuencia, es periódica:

En este caso, la podemos poner tanto como con la expresión $x_2\ o\ x_1$ porque son semejantes entre sí, y para lograr la mayor aproximación posible al número irracional $[\delta(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2]$. Entonces la ecuación quedaría:

$$x_2 = A_2\, sen\,[\omega_1 t - (\omega_1 t - \omega_2 t) + \varphi_2] = A_2\, sen\,[\omega_1 t + \delta(t)]$$

Como las elongaciones son semejantes entre sí, su fase se deduce de la siguiente manera:

$$tg\ \varphi = \frac{A_1\, sen\, \varphi_1 + A_2\, sen\, \delta}{A_1\, cos\, \varphi_1 + A_2\, cos\, \delta}$$

$$\varphi = arctg\ \frac{A_1\, sen\, \varphi_1 + A_2\, sen\, \delta}{A_1\, cos\, \varphi_1 + A_2\, cos\, \delta}$$

Una vez tengamos la fase ya podemos averiguar el valor de la amplitud, de nuevo aplicando el teorema del coseno:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\ (\varphi_1 - \delta)$$

Una vez comprendido todo esto, se deduce que todo movimiento periódico se puede descomponer en un número determinado de funciones armónicas. En todo caso de que si se cumple esta condición $x = x(t)$, siendo una función periódica no armónica se puede considerar como la superposición de movimientos vibratorios armónicos simples de frecuencias $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots, etc$. Por consiguiente, podemos expresar matemáticamente esta serie trigonométrica:

$$x(t) = A_0\ sen\ 2\pi 0\nu t + A_1\ sen\ 2\pi\nu t + A_2\ sen\ 2\pi 2\nu t + \cdots + = A_0 + A_1\ sen\ 2\pi\nu t +$$

$$+A_2\ sen\ 2\pi 2\nu t + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} A_k\ sen\ 2\pi n\nu t$$

6. *Teoría de Erwin Schrödinger de la mecánica cuántica*.

Introducción:

Esta teoría fue creada por Erwin Schrödinger en el año 1925, en la cual explica el comportamiento ondulatorio de la materia. Múltiples evidencias experimentales demuestran de manera verosímil, que las partículas de los sistemas microscópicos obedecen a las leyes del movimiento ondulatorio, en vez de seguir las leyes de la dinámica expuestas por Newton de sistemas macroscópicos. Por lo tanto, una partícula microscópica actúa de manera que su comportamiento estuviese ligado a una función de onda y a su vez la función de onda determina las características de la partícula, con una longitud de onda asociada. Los experimentos de este tipo, estudia los casos más simples que se dan en la naturaleza, a través de osciladores armónicos simples o bien de partícula libres. Pero esta teoría unifica todos los casos particulares que se dan en el ''mundo cuántico'' bajo una formulación matemática, especificando así que para cada sistema, la ecuación que controla el comportamiento de la función establezca una conexión con el comportamiento de una partícula. Esta teoría, es un caso particular que se da en la mecánica Newtoniana en el límite microscópico, además de ser una extensión del propio postulado de de Broglie.

Simbología:

$\Psi(x,t)$: es una función que asigna coordenadas espaciales y un valor temporal, que describe el comportamiento del electrón.

k: Número de ondas.

T: Energía cinética (la energía que consume una partícula cuando se desplaza).

x: Espacio.

$\hat{p}$: Operador momento.

v: Frecuencia de radiación electromagnética absorbida o emitida por los átomos.

h: Expresa la relación entre la cantidad de energía y de frecuencias asociada a un cuanto o fotón.

$\widehat{H}$: Operador Hamiltoniano (mide la suma de la energía cinética y potencial del estado cuántico. Algo así como la energía mecánica de un sistema. Se describiría así $\widehat{H} = T + V$.

6.1 *Desarrollo de la teoría cuántica de Erwin Schrödinger.*

Para empezar esta laboriosa demostración, primero hay que partir con un dato que es una onda viajera senoidal para expresar la función de onda. Donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\omega = 2\pi\nu$ serán necesarios para lo que viene a continuación:

$$\Psi(x,t) = sen\ 2\pi\ \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) = sen\ \frac{2\pi}{\lambda}x - sen\ 2\pi\nu t = sen\ kx - sen\ \omega t = sen\ (kx - \omega t)$$

Diferenciando parcialmente, respecto a espacio y tiempo:

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial\ sen\ (kx - \omega t)}{\partial x} = k\ cos\ \ (kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial[\partial\Psi(x,t)]}{\partial x(\partial x)} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = k\frac{\partial\ cos(kx - \omega t)}{\partial x} = -k^2\ sen\ (kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\ sen\ (kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega\ cos\ \ (kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial[\partial\Psi(x,t)]}{\partial t(\partial t)} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = \ -\omega\frac{\partial\ cos\ \ (kx - \omega t)}{\partial t} = -[-\omega - \omega\ sen\ (kx - \omega t)]$$
$$= \ -\omega^2\ sen\ (kx - \omega t)$$

Para llegar a la conclusión matemática de la ecuación, es necesario saber que la ecuación a la que queremos llegar a demostrar es una ecuación diferencial parcial. Debido a que esta ecuación no puede derivarse de la mecánica clásica, sin embargo si nos podría ayudar los postulado de de Broglie-Einstein. Para llevar esto acabo, se debe de partir del concepto de energía clásica y cumplir cuatro normas:

1- Tiene que coincidir con el postulado de de Broglie-Einstein:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \nu = \frac{E}{h}$$

2- Deberá ser equivalente con la ecuación:

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

3- Es necesario que sea lineal la función de onda, para que cualquier combinación lineal arbitraria, con sus respectivas constantes arbitrarias ($c_1\ y\ c_2$) de como solución la suma de las funciones de onda $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$. Las constantes arbitrarias pueden tener cualquier valor. El objetivo de esta combinación lineal, es describir los patrones de interferencia constructiva y destructiva de la onda, a partir de la linealidad que se puede hacer al sumar las funciones de ondas.

4- La energía potencial viene dada por una función de x, a veces de f. Sin embargo, existe una singularidad cuando:

$$V(x,t) = V_0$$

Que es justamente cuando una fuerza actúa sobre una partícula libre, lo cual produce que si F=0 $V_0\ es\ una\ cosntante$:

$$F = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

Ahora se supondrá que la ecuación diferencial deseada, tendrá como soluciones ondas senoidales viajeras de longitud de onda y frecuencia constantes. Usando las relaciones de de Broglie-Einstein, para escribir la ecuación en términos de longitud de onda y frecuencia, para satisfacer la norma 1 y 2:

$$\frac{h^2}{2m\lambda^2} + V(x,t) = h\nu$$

En este momento se empleará la función de onda senoidal, a partir de la frecuencia angular y número de ondas:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x,t) = \hbar\omega$$

Para dejar claro:

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

Para satisfacer la norma 3, requiere que cada término en la ecuación diferencial sea lineal en la función de onda, es decir, proporcional a la primera potencia de la función de onda. Por ejemplo, si el cambio de $\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$ que resulta al cambiar la magnitud de la función de onda, digamos por un factor c, se ve que la derivada aumenta por el factor y por esa razón es proporcional a la primera potencia de la función. Esto es correcto debido a que c es cualquier constante:

$$\frac{\partial^2[c\,\Psi(x,t)]}{\partial x^2} = c\,\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Para cumplir con la norma 4 se deberá tratar de dar con la forma de dar solución a la partícula libre. Como hemos observado anteriormente, al escribir una ecuación de una onda senoidal viajera y sus posteriores derivadas parciales. Ya que se ha empleado un factor $-k^2$ para otorgarle una solución a la segunda derivada del espacio y otro ω para dar un resultado a la primera derivada parcial del tiempo; por lo tanto, se sugiere que para resolver la ecuación diferencial parcial, se haga con una segunda derivada parcial del espacio en la que tendrá que ir acompañado de la de la energía potencial respecto a su función de onda para asegurar la linealidad y otra primera derivada parcial del tiempo. Con todas estas proposiciones nos queda algo así, en las que tenemos que colocar dos nuevas constantes con un valor a determinar ($\propto y \beta$) para otorgar flexibilidad y que se cumplan los requisitos:

$$\propto \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = \beta \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Sabiendo las múltiples derivadas parciales de las funciones de onda realizadas, serán clave para responder en caso de que sea un potencial constante $V(x,t) = V_0$:

$$\alpha\, sen\,(kx - \omega t)\, k^2 + sen\,(kx - \omega t)V_0 = -\beta \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

A partir de esto se genera otro problema que es, que alfa y beta surgen para realizar combinaciones especiales de espacio y tiempo para la cuales es el seno y coseno con sus respectivas fases, que hemos visto en la ecuación anterior. Resulta que existe la posibilidad de dar un resultado, bastante más sencillo. Como la dificultad era la de las razones trigonométricas con sus respectivos argumentos, se cambia por una combinación más sencilla que es la que viene a continuación, donde gamma es una constante de valor indeterminado:

$$\Psi(x,t) = cos(kx - \omega t) + \gamma\, sen\,(kx - \omega t)$$

Derivando parcialmente esta nueva combinación:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = -k\, sen\,(kx - \omega t) + k\gamma\, cos\,\ (kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\, cos(kx - \omega t) - k^2\gamma\, sen\,(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \omega\, sen\,(kx - \omega t) - \omega\gamma\, cos\,\ (kx - \omega t)$$

Fijándonos con gran atención, en las soluciones de la segunda derivada parcial del espacio, en la solución de la primera derivada parcial del tiempo y en la nueva combinación, sustituyendo con precisión; en la que ya por fin añadimos las constantes gamma, beta, la energía potencial y colocándolas con el mismo orden establecido, que en la primera vez que colocamos las constantes beta y alfa:

$$\alpha k^2 \cos\ (kx - \omega t) - \alpha k^2 \gamma\ sen\ (kx - \omega t) + V_0 \cos(kx - \omega t) + V_0 \gamma\ sen\ (kx - -\omega t) = \beta\omega\ sen\ (kx - \omega t) - \beta\omega\gamma \cos(kx - \omega t)$$

Ahora igualamos a cero sacando factor común:

$$[\alpha k^2 + V_0 + \beta\omega\gamma] \cos(kx - \omega t) + [-\alpha k^2 \gamma + V_0 \gamma - \beta\omega]\ sen\ (kx - \omega t) = 0$$

Para que la última igualdad se cumpla, para todas las variables independientes de espacio y tiempo, es necesario que los coeficientes de las razones trigonométricas sean cero. Para ello, tendremos que centrarnos en las entidades matemáticas concerniente en los corchetes y despejar a beta y sus "acompañantes´´:

$$\alpha k^2 + V_0 = -\beta\gamma\omega$$
$$\alpha k^2 \gamma + V_0 \gamma = (-\alpha k^2 + V_0)\gamma = \frac{\beta\omega}{\gamma}$$

Ahora restando los resultados e igualando a cero:

$$0 = -\beta\omega\gamma - \frac{\beta\omega}{\gamma} = -\frac{\beta\omega\gamma^2}{\gamma} - \frac{\beta\omega}{\gamma} \ \rightarrow\ \frac{\beta\omega\gamma^2}{\gamma} = -\frac{\beta\omega}{\gamma} \rightarrow \gamma\,\gamma = \ -1\left(\frac{\beta\omega}{\beta\omega}\right) \ \rightarrow\ \gamma = \frac{-1}{\gamma}$$

De modo que:

$$\gamma\,\gamma = \gamma^2 = -1 \ \ \rightarrow\ \ \gamma = \pm\sqrt{-1} = \pm\, i$$

Sustituyendo este resultado con entidad compleja en:

$$\alpha k^2 + V_0 = -\beta\omega\gamma = \mp i\beta\omega$$

Este resultado tiene un gran parecido con $\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega\right)$. Para a posteriori, conseguir con astucia matemática el valor de gamma:

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{2m} \;\; \rightarrow \;\; \alpha = \; -\frac{\hbar^2}{2m}$$

De nuevo observando la relación entre ambas ecuaciones y usando la astucia matemática:

$$\mp i\beta = \hbar \;\; \rightarrow \;\; \beta = \pm i\hbar$$

Entonces aquí estaría la ecuación matemática resultante, que define el movimiento de la partícula en la realidad cuántica, a partir de leyes del movimiento ondulatorio pertinentes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Cabe recalcar que esta ecuación diferencial parcial, se creó para un caso especial en el que la partícula libre tiene $V(x,t) = V_0$. Hasta este punto, en el caso general en el que se diese que la energía potencial $V(x,t)$ variase como una función de espacio y tiempo, es decir, donde la fuerza no es cero. Aunque no se pueda determinar que es correcto, si es posible suponer que las soluciones cuya función de onda $\Psi(x,t)$ asociada con el movimiento de una partícula con cierta masa, se encuentre bajo las influencias de fuerzas generadas por la energía potencial.

Para verificar que la ecuación de Schrödinger es lineal respecto a su función de onda, es decir, que coincida con la norma número tres expuesta con anterioridad. Para ello habrá que comprobar que $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ son solucione para una energía potencial constante. Entonces recurrimos a la combinación lineal con sus respectivas constantes arbitrarias:

$$\Psi(x,t) = c_1\,\Psi_1(x,t) + c_2\,\Psi_2(x,t)$$

El objetivo prioritario para lograr el propósito, es simplemente igualar la ecuación diferencial parcial a cero:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\;\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) - i\hbar\;\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 0$$

A continuación, sólo se tendrá que incorporar la combinación lineal para posteriormente igualarla a cero:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[c_1\frac{\partial^2 \Psi_1(x,t)}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 \Psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right] + V[c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)] - i\hbar\left[c_1\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} + +c_2\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}\right] = 0$$

Esto es un resultado obvio, debido a que a la ecuación de Schrödinger afirma que el contenido de los paréntesis es igual a cero.

En este caso, se va estudiar una variable del oscilador armónico simple donde la función de onda $\Psi(x,t)$ está en su estado más bajo de energía. Consistiría en que una partícula de masa m, esté actuada por una fuerza de restitución lineal con una constante de fuerza C. Donde habrá que partir con el dato que se va a expresar a continuación, para la resolución del problema:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2} e^{-\left(\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{C}{m}}t}$$

En este caso la A sigue siendo la amplitud, que vimos anteriormente. La expresión se aplica al caso en el cual la partícula estaría en reposo, es decir, si no estuviese oscilando alrededor de un punto de elongación. Por lo tanto está en el origen del eje x (x=0). Ante esta situación la energía potencial sería independiente del tiempo, ya que no está oscilando, por ende no se puede contabilizar el tiempo requerido para hacerlo. Esto quedaría así $\left(\frac{Cx^2}{2} \textit{es un dato que se te da para el cálculo de la variable}\right)$:

$$V(x,t) = V(x) = \frac{Cx^2}{2}$$

La ecuación de Erwin Schrödinger sería de la siguiente manera para este potencial:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{C}{2}x^2\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Para comprobar la validez de la solución es necesario derivar parcialmente, ahora se expondrá la derivación parcial respecto al tiempo:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}t}{\partial t} = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi$$

En este instante se hará la primera y segunda derivada parcial del espacio, utilizando la regla del producto como si fuese la derivada de una función de una variable pero con derivadas parciales $(f(x) = fg \quad \rightarrow \quad f'(x) = f'g + fg)$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial - \left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2}{\partial x} = -\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\,2x\Psi = -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}x\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\Psi - \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}x\left(-\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}x\Psi\right) = -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\Psi + \frac{Cm}{\hbar^2}x^2\Psi$$

El procedimiento matemático anterior se realiza de esa manera, porque si no la segunda deriva parcial quedaría insatisfecha. Por lo tanto, se deriva respecto a su función de onda y espacio, para posteriormente volver a multiplicarla por la primera derivada parcial del espacio, dándole así sentido matemático. Después de esta ardua explicación, nos dispondremos a sustituir lo anterior en la ecuación de Erwin Schrödinger:

$$\left(\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\Psi + \frac{Cm}{\hbar^2}x^2\Psi\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) + \frac{C}{2}x^2\Psi = i\hbar\left(-\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi$$

$$\frac{\hbar^2\sqrt{Cm}}{2m\hbar}\Psi - \frac{\hbar^2 Cm}{2m\hbar^2}x^2\Psi + \frac{C}{2}x^2\Psi = \frac{-i^2\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi$$

$$\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi - \frac{C}{2}x^2\Psi + \frac{C}{2}x^2\Psi = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi$$

$$\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi$$

Esta solución es válida debido a que se satisface la igualdad.

6.2 *Interpretación de Max Born de las funciones de onda*.

Una propiedad cuanto menos curiosa, es de las funciones de onda se puede ver evaluando $\gamma = i$ que especifica el aspecto de la función de onda cuando se trata de partículas libres. Se obtiene la misma ecuación, que se empleó para la resolución del problema:

$$\Psi(x,t) = cos\ (kx - \omega t) + i\ sen\ (kx - \omega t) = e^{i(kx-\omega t)}$$

La función de onda compleja, sirve para definir el fenómeno del movimiento ondulatorio de la partícula libre, ya que la función de onda real carece de carácter dimensional para la búsqueda de la solución a este problema; debido a esto la ecuación de Schrödinger está basada en la ecuación de la energía, que relaciona la primera potencia de energía total con la segunda potencia de impulso. Al ser una función de onda de la mecánica cuántica es compleja, verificando así dos funciones de tipo real e imaginaria. Por ejemplo, una onda generada a partir de un agitamiento en una cuerda, se puede explicar mediante una función real que mide varias secciones de la cuerda en varios instantes temporales. Es importante que la función de onda sea imaginaria, debido que los físicos del siglo XIX confundieron la propagación de las ondas a través del éter; que luego más tarde Albert Einstein terminó demostrando lo contrario.

La relación existente entre las propiedades de la función de onda $\Psi(x,t)$ y el comportamiento de la propia partícula asociada está definida en términos de densidad de probabilidad. A partir, de la longitud resultante del eje x se puede encontrar la partícula en la coordenada x en un intervalo de tiempo. Hasta entonces, partiremos con un dato matemático que es el siguiente (la relación entre densidad de probabilidad y la función de onda):

$$P(x,t) = \Psi * (x,t)\Psi(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$$

Simplemente para resolver el problema entre la relación de la densidad de probabilidad$P(x,t)$ y su función de onda $\Psi(x,t)$, se tiene que multiplicar la función de onda $\Psi(x,t)$ por su conjugada $\Psi * (x,t)$. El postulado se basa en: si en el instante de tiempo t se realiza una medición pertinente para la posterior localización de la partícula asociada con su función de onda $\Psi(x,t)$, por consiguiente la probabilidad $P(x,t)dx$ de encontrar a la partícula en una coordenada entre x y $x + dx$ es lo mismo que expresar $\Psi * (x,t)\Psi(x,t)dx$. Por ende, como el movimiento de una partícula está enteramente conectado con la propagación de una función de onda asociada, entonces las dos partículas deben estar juntas en el espacio. Esto es así debido a que, la partícula se tiene que encontrar en algún lugar en la que las ondas tengan una extensión apreciable; quiere decir esto que la densidad de probabilidad $P(x,t)$ tiene que ser apreciable donde la función de onda $\Psi(x,t)$ sea apreciable.

En este momento, se va a demostrar un problema en que se plantea que $\Psi * (x,t)\Psi(x,t)$ es estrictamente real y positivo o también cabe la probabilidad de que sea cero. $[R(x,t)\ simboliza\ la\ parte\ real\ de\ la\ función, mientras\ que\ I(x,t)\ su\ parte\ imaginaria\ ]$Es to se obtiene así, como otra cualquier función compleja $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = R(x,t) + iI(x,t)$$

Al tratarse de una probabilidad suponemos que $1 \geq P(x,t) \geq 0$ .El complejo conjugado de $\Psi(x,t)$ es así:

$$\Psi * (x,t) = R(x,t) - iI(x,t)$$

Multiplicando detenidamente se logra:

$$\Psi * \Psi = (R - iI)(R + iI) = R^2 - i^2I^2 = R^2 + I^2$$

Entonces esto da:

$$\Psi * (x,t)\Psi(x,t) = \ [R(x,t)]^2 + [I(x,t)]^2$$

Aprendido esto, se puede evaluar la densidad de probabilidad para la función en estado menor de energía del oscilador armónico simple (ecuación dada en el problema anterior), donde su función de onda es $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2} e^{-\left(\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{C}{m}}t}$$

Por lo tanto, la densidad de probabilidad es:

$$P = \Psi * \Psi = Ae^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2} e^{+\left(\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{C}{m}}t} Ae^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2} e^{-\left(\frac{i}{2}\right)\sqrt{\frac{C}{m}}t} = A^2 e^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2+\left(\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)x^2}$$
$$= A^2 e^{-x^2\left(\frac{2\sqrt{Cm}}{2\hbar}\right)} = A^2 e^{-\left(\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\right)x^2}$$

Una observación nos indica que la densidad de probabilidad es independiente del tiempo, cuando empezamos a operar siendo esta es dependiente del tiempo. Además se puede deducir que la partícula con su respectiva función de onda, está en un solo estado de energía. Como se había dicho antes, la probabilidad de la medición de un lugar debe ser que ocurra en el eje x entre la coordenada x y $x + dx$ es igual a Pdx. Esto quiere decir que un plano está rotando respecto a un punto, en su eje x.

6.3 *La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.*

Ahora vamos a pasar, a la resolución de esta ecuación diferencial parcial que describía las propiedades de las fuerzas que actúan sobre la partícula que nos interesa, en función de su energía potencial $V(x,t)$ (Expuesta en el principio de la página dieciocho). Para ello emplearemos una técnica llamada separación de variables, es decir, en buscar soluciones en forma de productos de funciones, en la que cada una contiene una variable independiente que aparece en la ecuación. Por ejemplo si yo quiero saber cómo se ha montado una figura de lego, lo primero que tengo que hacer es simplemente es desmontarla poco a poco, para saber cómo se ha construido. El objetivo trata, de buscar una función de onda $\Psi(x,t)$ cuyo producto es:

$$\Psi(x,t) = \ \psi(x)\varphi(x,t)$$

Donde en esta situación $\psi(x)$ es una simple función del espacio y $\varphi(t)$ es otra función respecto, a su parámetro de tiempo. No obstante, siempre que la energía potencial no dependa del tiempo, de tal modo se escribe así $V(x)$; aunque no hace falta decir, que en este caso se está suponiendo que esta función exista. De tal manera que en la mecánica clásica y cuántica, se suele expresar la energía potencial independiente del tiempo, así que no es del todo un requisito. Ahora se demostrará, que $\varphi(t)$ satisface una ecuación diferencial, que se resuelve con una exponencial compleja:

$$\varphi(t) = e^{-i\frac{E}{t}\hbar} = cos\left(\frac{E}{t}\hbar\right) - i\ sen\left(\frac{E}{t}\hbar\right)$$

Aquí E es energía total del sistema. Sustituyendo en la ecuación diferencial parcial con $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$ y por supuesto aplicando la energía potencial independiente del tiempo $V(x)$, se consigue:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)\varphi(t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)\varphi(t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x)\varphi(t)}{\partial t}$$

Recurriendo a la separación de variables, donde cabe recalcar que la derivada parcial es una función de varias variables que evalúa las derivadas de la función pertinente, mientras que las demás se quedan fijas. Por lo tanto, es lógico suponer que como se está operando con una variable independiente del tiempo, se recurra a las derivadas de funciones. Primero se empezará con la del espacio:

$$\frac{\partial^2\psi(x)\varphi(t)}{\partial x^2} = \varphi(t)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \varphi(t)\frac{d^2\psi(x)}{\partial x^2}$$

Ahora se hará con la del tiempo:

$$\frac{\partial\psi(x)\varphi(t)}{\partial t} = \psi(x)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \psi(x)\frac{d\varphi(t)}{\partial t}$$

Sustituyendo con estos nuevos datos en la ecuación:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\varphi(t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\varphi(t) = i\hbar\psi(x)\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Dividiendo ambos partes de la ecuación entre $\psi(x)\varphi(t)$, se obtiene:

$$\frac{1}{\psi(x)\varphi(t)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi(t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\varphi(t)\right] = \frac{1}{\psi(x)\varphi(t)}\left[i\hbar\psi(x)\frac{d\varphi(t)}{dt}\right]$$

$$\frac{1}{\psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)}\right] = \frac{1}{\varphi(t)}\left[i\hbar\frac{\psi(x)}{\psi(x)}\frac{d\varphi(t)}{dt}\right]$$

$$\frac{1}{\psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)\right]=i\hbar\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si observamos bien, vemos que la parte de la izquierda de la ecuación no depende del tiempo, mientras que en la parte de la derecha de la ecuación no depende del espacio; consecuentemente el valor común no puede depender ni de espacio, ni de tiempo, debido a que la ecuación quedaría insatisfecha en ambas partes. En otras palabras, el valor común debe de ser constante y se le denominará G (constante de separación). El resultado de esta consideración es que conduce a ecuaciones separadas, entonces la solución al problema es igualando, tanto la parte de la izquierda como la parte de la derecha de la ecuación al valor común. Se hace de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)\right]=G$$

$$i\hbar\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=G\rightarrow\ \frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{iG}{\hbar}\varphi(t)$$

La última ecuación diferencial escrita es prioritaria que se resuelva de inmediato. Esta ecuación diferencial, establece que al no existir una variable de tiempo en la parte de la derecha de la ecuación no se puede derivar, entonces se tiene que emplear la astucia matemática; determinando así, el valor de $\varphi(t)$ como una forma de exponencial compleja, ya que es la manera más fácil de representarla. Por ende, esto queda así:

$$\varphi(t)=\ e^{\alpha t}$$

El valor de alfa se determinará en cuestión de tiempo, no sin antes haber hecho las demostraciones matemáticas pertinentes. Seguimos demostrando matemáticamente:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\alpha e^{\alpha t}=\alpha\varphi(t)$$

Esto genera:

$$\alpha\varphi(t)=-\frac{iG}{\hbar}\varphi(t)$$

El valor de alfa es el siguiente:

$$\alpha=-\frac{iG}{\hbar}$$

La anterior ecuación se le encuentra su verdadera solución, en vez de dar una suposición:

$$\varphi(t) = e^{-i\frac{Gt}{\hbar}} = cos\left(\frac{Gt}{\hbar}\right) - i\ sen\left(\frac{Gt}{\hbar}\right)$$

$$\varphi(t) = e^{-i\frac{Gt}{\hbar}} = cos\ 2\pi\ \left(\frac{Gt}{\hbar}\right) - i\ sen\ 2\pi\ \left(\frac{Gt}{\hbar}\right)$$

Poniendo la máxima atención posible, se puede apreciar que $\varphi(t)$ es una función oscilatoria (se añade a cada razón trigonométrica el 2π, para especificar que es una función oscilatoria; en la que es lógico pensar que la constante de Planck reducida $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ se cambie por la constante de Planck h, ya que el periodo lo indica la razón trigonométrica y no la constante de Planck reducida) que responde a la frecuencia de $\nu = \frac{G}{h}$. Pero según los postulado de de Broglie-Einstein, la frecuencia viene dada por $\nu = \frac{E}{h}$. Por consiguiente, E es la energía total de la partícula con su longitud de onda asociada. Por lo tanto, la constante de separación G tiene que ser igual a la energía total de la partícula E. Esto quedaría así:

$$G = E$$

Utilizando este nuevo valor de G en la ecuación espacial de antes, que se obtuvo en la separación de variables, sería así:

$$\frac{1}{\psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\right] = E$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

De nuevo volvemos a emplear el valor de G, en la solución de la ecuación temporal $\left[\varphi(t) = e^{-i\frac{Gt}{\hbar}}\right]$ de modo que, se complementa la especificación de $\varphi(t)$ con la de su función de onda $\Psi(x,t)$. Entonces la ecuación es:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

Ahora se debe desarrollar un argumento coherente, partiendo de nuevo con la energía clásica para llegar directamente hasta la demostración matemática de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Debido a que tiene que satisfacer la norma número dos, que se empleó para la ecuación diferencial parcial y que ahora es necesario emplear para esta ecuación. Entendido todo esto, empecemos ya con ello:

$$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

Además también tiene que concordar con la norma número uno, es decir, con el postulado de de Broglie-Einstein:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Combinando estas dos relaciones entre sí:

$$\frac{(\hbar k)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V = E$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)$$

La dependencia espacial de una función de onda, viene dada por:

$$\psi(x) = sen\,\frac{2\pi x}{\lambda} = sen\; kx$$

El número de ondas k es totalmente constante, ya que la energía potencial V es una constante para el caso de una partícula libre. Diferenciando dos veces, se logra la siguiente expresión:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -k\cos kx$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 sen\; kx = -k^2\psi(x)$$

Sustituimos la segunda derivada de la función de onda espacial, en el valor del cuadrado del número de ondas k^2:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) - V\psi(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V\psi(x) = E\psi(x)$$

Esta sigue siendo la ecuación de Erwin Schrödinger independiente d l tiempo, pero esta se usa para obtener una conclusión específica para el caso de energía potencial de una partícula libre, sigue siendo válida como la que se usó anteriormente para definir este fenómeno que se da en la naturaleza.

6.4 Átomos con un solo electrón.

En esta parte se planteó el estudio de un átomo con un solo electrón, debido a que es el más simple de todos los casos posibles. Por ejemplo, el átomo que Erwin Schrödinger escogió para la formulación matemática de la mecánica cuántica fue el conocido hidrógeno, este fue considerado como un punto de vista histórico que sirvió para entender mejor la materia. Además de que por supuesto, sirvió como base para entender mejor los átomos multielectrónicos (átomos con varios electrones distribuidos en distintos estados cuánticos), las moléculas y núcleos. El átomo con un solo electrón es un sistema simple que existe en la naturaleza, pero el más complicado de interpretar matemáticamente debido a que contiene sólo dos partículas y se representa de manera tridimensional. Este sistema se compone de un núcleo cargado positivamente y un electrón cargado negativamente que se mueve bajo la influencia de su mutua atracción en la que interviene por supuesto la fuerza de Coulomb que, a la vez los mantiene unidos. Al tener carácter tridimensional, tiene impulsos angulares. El hecho de que el átomo tenga dos partículas, no crea dificultades siempre y cuando se emplee la técnica de la reducción de masa. Consiste en representar un modelo, donde un átomo tiene el núcleo de masa infinita y el electrón se desplace con una masa reducida. Esto quiere decir, que supondrá que el átomo con masa reducida describirá exactamente el mismo recorrido que un átomo común, respecto a su núcleo estacionario. La energía total del átomo modelo con el electrón de masa reducida, será igual a la energía total del átomo real; considerando que el centro de masas esté en reposo. Algo así como la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol. Ahora se desarrollará la ecuación de Erwin Schrödinger concerniente a este fenómeno de la naturaleza, ya descrito. Para lograr este propósito, habrá que considerar un electrón de masa reducida μ que se mueve bajo la influencia del potencial de Coulomb. Aquí se partirá con un dato que otorga el propio problema, que es la descripción matemática del potencial de Coulomb:

$$V = V(x, y, z) = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 s}$$

Donde x, y, z representan un espacio en tres dimensiones, respecto a sus coordenadas rectangulares. La raíz cuadrada simboliza la distancia que separa entre el núcleo y el electrón. La Ze es la carga nuclear. Sabiendo esta serie de preceptos, podemos pasar al desarrollo de la ecuación de Schrödinger para este sistema en tres dimensiones. Otro dato que se da en el problema, es la expresión clásica de energía total de un sistema E y los operadores momento $\hat{p}_x = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = i\hbar\frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\frac{1}{2\mu}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + V(x, y, z) = E$$

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right] + V(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2\mu}\left[(i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Las entidades matemáticas p_x, p_y, p_z son las componentes de x, y, z, del operador momento del electrón, en un espacio tridimensional. Obviamente son tres cantidades dinámicas de la energía cinética, que son sustituibles por sus operadores en coordenadas rectangulares tridimensionales. Por lo tanto, se sustituye en la ecuación diferencial parcial de Schrödinger por derivadas parciales de segundo orden asociado cada una a su dimensión en la que operan, en la que sumadas entre sí representan un espacio dinámico; teniendo en cuenta la nueva masa del electrón reducida y su energía potencial:

$$\frac{1}{2\mu}(i\hbar)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Operando cada término con su función de onda, en la que ahora representa un espacio tridimensional en coordenadas rectangulares y su variable temporal. Nos queda algo como esto:

$$\boldsymbol{\Psi} = \Psi(x, y, z, t)$$

Se obtiene sabiendo cómo es la forma de su función de onda, la ecuación diferencial pertinente:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right]V(x,y,z)\Psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t}$$

Es más simple expresarlo en función de onda con un operador Laplaciano (el operador Laplaciano es un agente geométrico que expresa un función escalar en diversas coordenadas, expresando la divergencia existente entre la densidad de fluidez entre los vectores en un espacio dinámico tridimensional. Va representado por esta fórmula $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$). Esto se haría de la siguiente manera:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\boldsymbol{\Psi} + V\boldsymbol{\Psi} = i\hbar\boldsymbol{\Psi}$$

En el caso de la ecuación independiente del tiempo de Schrödinger, cabe la posibilidad de que también se pueda aplicar la tridimensionalidad esta ecuación $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$. Se hace añadiendo coordenadas a la función de onda y la función espacial, el resto no varía:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

Esta función espacial o eigenfunción $\psi(x,y,z)$ es una solución a la ecuación independiente del tiempo de Schrödinger$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x) = E\psi(x)\right)$. Solo sustituyendo por funciones espaciales tridimensionales, en la que respecta un operador Laplaciano y la energía potencial tridimensional se logra esta ecuación diferencial parcial tridimensional:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E_{\psi(x,y,z)}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V\right)\psi(x,y,z) = E_{\psi(x,y,z)}$$

$$\widehat{H}\psi(x,y,z) = E_{\psi(x,y,z)}$$

$$\widehat{H}\boldsymbol{\psi} = E_{\boldsymbol{\psi}}$$

7. Desarrollo de la teoría de la relatividad especial.

7.1 Transformaciones de Galileo Galilei.

En este caso vamos a empezar con las transformaciones de Galileo Galilei, donde en un sistema de referencia x', y', z', t' se desplaza con una velocidad constante relativa a un sistema, x, y, z, t. Entonces los ejes x y x´ se suponen colineales:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Loa argumentos sencillos que conducen a ellas son:

1- Si se define que los ceros de las escalas de tiempo, utilizadas en los distintos sistemas son los mismos para cualquier tiempo y lugar, por ende ambas escalas de tiempo permanecerán invariables para todos los tiempos y lugares (t´=t).

2- Ya que es lógico que los planos x´y´ e xy siempre coincidan, también hay que tener en cuenta que z´=z y que y´=y.

3- Ya que en el intervalo de tiempo entre 0 y t´=t el plano y´z´se mueve en la dirección positiva una distancia vt, la coordenada x´ se hará menor que la coordenada. Entonces es $(x' = x - vt)$.

En este instante se usan las transformaciones de Galileo, para convertir la célebre ecuación de Newton ($F = ma$) en las coordenadas (x, y, z, t).

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

Para que el sistema sea válido en x, y, z, t, se necesita suponer que un cuerpo no esté afectado por ninguna fuerza, es decir, que esté en reposo. Sabiendo diferenciar dos veces las primeras ecuaciones respecto al tiempo, utilizando la relación entre que t´=t se demuestra que:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Esto quiere decir que, la masa m medida en el sistema primo es la misma que la medida en el sistema no primo; por consiguiente, los dos sistemas al estar relacionados entre sí por la transformación de Galileo no están acelerados entre sí, la transformación no cambia la aceleración. Por lo tanto, la fuerza es la misma en cualquier sistema y en sus otros componentes:

$$F_{x'} = F_x \qquad F_{y'} = F_y \qquad F_z{}' = F_z$$

Evaluando la descripción matemática de la fuerza prima respecto a cada componente y su aceleración, siguiendo la ecuación de Newton, pero dejando la masa del cuerpo tal y como está. La masa del cuerpo se queda igual, porque la masa es una propiedad intrínseca de una partícula en la mecánica clásica y no propiedad del efecto relativista:

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2} = F_x{}' \qquad m\frac{d^2y'}{dt'^2} = F_{y'} \qquad m\frac{d^2z'}{dt'^2} = F_{z'}$$

Si observamos detenidamente, nos damos cuenta que la descripción matemática de la Fuerza es equivalente, tanto en el sistema primo como en el sistema no primo. Esto es porque las ecuaciones de Newton, no cambian aunque se le realice una transformación galileana. Al ser un sistema x, y, z, t en reposo, ya que $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$ si F=0. También se deduce que el sistema primo x', y', z', t' está en reposo porque $\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} = 0$ si F=0.

Como las ecuaciones de Newton son idénticas en cualquiera de los sistemas, se llega a esta conclusión matemática.

7.2 *Dilatación del tiempo y contracción de longitudes*.

Vamos a realizar un experimento imaginario, en el que un observador O´ que se mueve con una velocidad relativa al observador O, desea compara con su reloj la medida de un intervalo de tiempo con una medida del mismo tiempo que pertenece a O. Se sabe que cuando el observador está quieto respecto al el otro observador, todos los relojes corren al mismo ritmo y están sincronizados. Ergo, las mediciones de los intervalos de tiempo hechas con relojes en los sistemas, donde se manda una señal luminosa a un espejo que se lo refleja directo a él. Tanto el observador O como el observador O´, registran la emisión de la señal con los relojes C1 y C´ en el instante. Para saber cuánto tarda, utilizan los relojes C2 y C´ que coincide cuando recibe de regreso la señal luminosa. Los dos eventos que definen el principio y el final del intervalo de tiempo, entre la recepción y emisión de la señal luminosa. Lo que quiere dejar claro el problema, es que las magnitudes espacio y tiempo se modifican en función de cuando un cuerpo se mueve a una velocidad uniforme y rectilínea respecto a un observador; es decir, que a cuanta más velocidad vayas respecto a un observador más se notarán estas modificaciones pertinentes, por consiguiente el espacio se contrae y el tiempo se distorsiona en función de tu velocidad. Si vas a una velocidad baja estas modificaciones apenas se notan, pero si viajas a la velocidad de la luz constante por el vacío estas modificaciones se notarán de manera radical. Por ejemplo, la paradoja de los mellizos dice que el mellizo A se queda en la Tierra, observando como el mellizo B coge una nave que va a la velocidad de la luz. El tiempo y el espacio pasaría de otra manera para el mellizo A, supongamos que el mellizo A ha esperado al mellizo B durante diez años, donde se deduce que el mellizo A tendrá diez años más que los que tenía cuando vio que se hermano se iba. Entonces el Mellizo B en su trayecto en la nave a la velocidad de la luz, el espacio se habrá contraído de manera radical y el tiempo habrá pasado mucho más lento para él. De tal manera que cuando el mellizo B regresa de su viaje, para él solo habrá pasado un año, mientras que el mellizo A como había dicho antes, habrá pasado para él diez años.

Ahora pasemos a la interpretación matemática del experimento imaginario de los observadores. Basándose en el teorema de Pitágoras ($h^2 = c_1^2 + c_2^2$) y el tiempo transcurrido entre estos dos eventos según el O´ es $T' = 2\Delta t$:

$$c^2 \Delta t^2 = v^2 \Delta t^2 + l^2$$

Aquí l es la distancia que separa al observador O, c es la velocidad de la luz constante por el vacío (300000000 metros por segundo) y v es velocidad:

$$\Delta t^2 = \frac{l^2}{c^2 - v^2} = \frac{l^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{l^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ahora los observadores en movimiento relativo, no pueden discrepar a acerca de la medidas de las distancias perpendiculares a la dirección de movimiento. Entonces se tiene que $l' = l$:

$$\Delta t = \frac{l'}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde se obtiene que:

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} T´$$

Se ha visto que la medición de un intervalo de tiempo entre dos eventos mayores que ocurren en el mismo sitio, resulta mayor por el factor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ en un sistema que se mueve con relación al primero pero zonas separadas.

A continuación expondré otro experimento imaginario adicional, considerando el anterior pero con ciertos cambios que diré. Imagine que en el sistema O se coloca una regla para medir el extremo en el reloj C1 y el otro reloj C2. Se denominará a L la longitud de la regla medida en el sistema O, respecto a la cual está en reposo. En este sistema se mueve la regla con una dirección paralela a su longitud, puesto que la velocidad O´ respecto a O será v y la de O respecto a O´ será también v. Por ende, genera una simetría extraña que no concuerda con los postulados de Einstein. Ahora volvemos a considerar T´ en el intervalo de tiempo en el instante cuando O´ ve que el extremo anterior de la regla pasa por C´ y el instante cuando él ve que el extremo pasa por el reloj. Por lo tanto se deduce, que el intervalo de tiempo está relacionado con la longitud L´ de la regla, que se mide en el sistema O´ y con su magnitud v medida en el mismo sistema. Entonces su descripción matemática es:

$$L´ = vT´$$

Existe la posibilidad de establecer los parámetros establecidos en el sistema O. En el sistema C´ que se mueve con velocidad v, recorre la distancia L en el tiempo T. Esto queda:

$$L = vT$$

Estableciendo relaciones entre las distintas ecuaciones se obtiene que:

$$L´ = L\frac{T´}{T}$$

Al intervalo de tiempo medido en el sistema en el cual los eventos ocurren en el mismo lugar se le denomina tiempo propio y efecto involucrado en la dilación del tiempo. Pero la dilación del tiempo muestra que:

$$T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = T´$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{T'}{T}$$

Sin embargo la longitud de la regla L:

$$L' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ L$$

Gracias a esto se ha encontrado una regla más corta, por el factor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ comparada con su longitud medida en un sistema la cual está en reposo. Esta longitud de medida de la regla se la denomina contracción de Lorentz.

7.3 <u>Transformaciones de Lorentz.</u>

El objetivo de estas transformaciones que se emplean en la teoría de la relatividad, es para transformar las variables de espacio y tiempo de un sistema, a otro que se mueve a velocidad constante respecto al anterior. Para entender esto de manera plausible, se propondrá otro experimento imaginario. Teniendo en cuenta los observadores O y O´, con O´ desplazándose con relación al observador O a la velocidad v en la dirección positiva de los ejes x´y x. Los planos resultantes de xy e xý´ coinciden siempre y los orígenes de sus sistemas de referencia coinciden al instante con t=t´=0. En este caso, el observador O´ enciende un bulbo (en este caso como una especie de bombilla) localizado en su origen y se produce una onda lumínica que se propaga desde el punto de emisión con velocidad c. Así que según el observador O´ al tiempo t´ de hacer frente será una esfera centrada en su origen de radio r´=ct´. No obstante, las coordenadas de cualquier punto satisfacerá la ecuación de la esfera ($x^2+y^2+z^2=r^2$):

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

Pero también será cierto que este fenómeno será equivalente, también con el observador O. Por lo tanto también es una esfera de radio r=ct, donde también satisfacerá esta ecuación:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

Donde existirá la relación entre los conjuntos de variables (x', y', z', t') y (x, y, z, t) que permitan que las dos últimas ecuaciones sean válidas, o sea, que se transforme la una en la otra. Las ecuaciones de cada variable de cada sistema, aplicando el factor γ:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(t + \delta)$$

Donde δ es una entidad matemática que determina una dimensión, que lleva consigo la velocidad relativa entre los sistemas, la velocidad de la luz y con sus respectivas dimensiones del tiempo. En este momento se puede decir que $\gamma \to 1$ y $\delta \to 0$ si $\frac{v}{c} \to 0$. La razón es que para $\gamma = 1 \; y \; \delta = 0$ se reduce a la transformación galileana lo cual es coincidente, ya que las transformaciones de Galileo deberán de ser correctas si la velocidad relativa v de los sistemas es extremadamente pequeña, si se compara con la velocidad de c de las señales luminosas.

Ahora se verán las formas expuestas en la ecuación de la esfera con las nuevas variables. Para escribir cada variable en términos no primadas se tiene:

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t + \delta)^2$$

$$\gamma^2(x^2 - 2xvt + vt^2) + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t^2 + 2t\delta + \delta^2)$$

Como la ecuación de la esfera relativa no primada, no tiene ecuaciones para cada una de sus variables en xt, se deberá cancelar el segundo término en el paréntesis del primer miembro con algo en el segundo miembro. Obtendrá la cancelación para todo valor posible en su variable independiente de t, donde sólo será posible con el segundo término en el paréntesis del segundo miembro. Esto queda así:

$$\gamma^2 2vxt = \; c^2\gamma^2 2\delta t$$

$$\delta = \frac{-\gamma^2 2vxt}{\gamma^2 c^2 2t} = -\frac{vx}{c^2}$$

Obsérvese que δ dimensiones de tiempo y que $\delta \rightarrow 0\; y\; \frac{v}{c} \rightarrow 0$, como se dijo anteriormente. Ahora se tendrá que la corrección de la sincronización δ es linealmente proporcional a v y a x. Factorizando obtendremos con $x^2\; y\; t^2$, después de añadir claro está este factor δ^2 y sin dejar atrás la ecuación de la esfera:

$$x^2\gamma^2\left(-\frac{v^2x^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\gamma^2\left(-\frac{v^2x^2}{c^2}\right)$$

$$\gamma^2x^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Centrándonos sólo en la expresión reducida, se verá que se obtendrá si el factor gama es igual a 1:

$$\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Por último se deducirán las ecuaciones de las transformaciones de Lorentz, a partir de su posterior derivación de las anteriores ecuaciones, para coordenada independiente del sistema primado:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Estas contracciones de Lorentz tienen un significado físico muy distinto al que Albert Einstein, dio con su teoría especial de la relatividad; ya que en las contracciones de Lorentz se usa la v, para referirse a la velocidad por la cual la luz se propaga por el éter y Albert Einstein dijo que se trataba de velocidad relativa.

7.4 *Transformación relativista de la velocidad.*

Una partícula que se mueve con uniforme u, se mide a partir de un sistema de referencia O. Se quiere cuantificar la velocidad uniforme u´ medida en el sistema O´, donde se da por entendido que se mueve con relación al observador o con la velocidad v. Al estar medido en el sistema O, cada vector resultante tiene sus componentes, asociada cada una al eje del sistema que representa. Sería de esta manera:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u_y = \frac{dy}{dt} \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

Entonces el vector velocidad medido en el sistema O´ es:

$$u´_x = \frac{dx´}{dt´} \qquad u´_y = \frac{dy´}{dt´} \qquad u´_z = \frac{dz}{´dt}$$

Para establecer las relaciones requeridas se deriva las transformaciones de Lorentz, sabiendo que v es constante. Para ello tenemos que emplear criterios de diferenciación, para así lograr resolver el problema con una solución más simple:

$$dx´ = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(dx - vdt)$$

$$dy´ = dy$$

$$dz´ = dz$$

$$dt´ = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)$$

A partir de lo dicho anteriormente:

$$u´_x = \frac{dx´}{dt´} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(dx - vdt)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u´_y = \frac{dy´}{dt´} = \frac{dy}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

Se va notando que $\frac{v}{c}$ se aproxima a cero, lo cual expresa cierta similitud con la transformación de Galileo. Otra impresionante propiedad que es imposible escoger u y v, ya que u´ se interpreta como la velocidad media del nuevo sistema, pueda ser mayor que c.

7.5 *Relatividad de la simultaneidad de sucesos.*

Este principio de simultaneidad consiste en que dos eventos independientes el uno del otro, sucedan a la vez para un determinado observador, mientras que para el otro observador un evento suceda antes que el otro.
Para demostrar esto matemáticamente vamos a suponer que dos sucesos son simultáneos en un sistema de referencia inercial (observador en estado de reposo) S, ¿lo son también en un sistema de referencia inercial S' que se mueve respecto al primero con una velocidad paralela al eje X y de módulo u? Empleemos la transformación de Lorentz para la obtención de la simultaneidad, donde en S nos encontramos con dos sucesos simultáneos ($\Delta t = 0$) e Δx puede tomar cualquier valor.
En S', la situación es la siguiente con su respectiva transformación de Lorentz:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) \rightarrow \Delta t = 0 \rightarrow \Delta t' = \gamma 0 - \frac{\gamma\beta}{c}\Delta x = -\frac{\gamma\beta}{c}\Delta x$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \rightarrow \Delta t = 0 \rightarrow \Delta x' = \gamma\Delta x - u0 = \gamma\Delta x$$

Sin embargo si los dos sucesos tiene lugar en los puntos del sistema de referencia inercial S con el mismo valor de x (en el mismo plano YZ), entonces $\Delta x = 0$ y en S' se tiene que:

$$\Delta t' = -\frac{\gamma\beta}{c}\Delta x \rightarrow \Delta x = 0 \rightarrow \Delta t' = -\frac{\gamma\beta}{c}0 = 0$$

$$\Delta x' = \gamma\Delta x \rightarrow \Delta x = 0 \rightarrow \Delta x' = \gamma 0 = 0$$

En este caso los dos sucesos son simultáneos en el sistema de referencia S'.
Por lo tanto, si los dos sucesos tiene lugar en puntos del sistema de referencia S con valores distintos de x, entonces $\Delta x \neq 0$ y en S':

$$\Delta t' = -\frac{\gamma\beta}{c}\Delta x$$

$$\Delta x' = \gamma\Delta x$$

En este instante se ha logrado demostrar que los sucesos son simultáneos en S y no en S'. Hemos llegado a la conclusión de que este fenómeno es simétrico, dado que como exige el principio de la relatividad, todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes entre sí. Así que, los dos sucesos son simultáneos en un sistema S', en general no lo son S, según muestra la aplicación de la transformación de Lorentz a la inversa:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'\right) \rightarrow \Delta t' = 0 \rightarrow \Delta t = \gamma 0 + \gamma\frac{\beta}{c}\Delta x' = \gamma\frac{\beta}{c}\Delta x'$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \rightarrow \Delta t' = 0 \rightarrow \Delta x = \gamma\Delta x' + \gamma u 0 = \gamma\Delta x'$$

7.6 <u>*¿Por qué $E = mc^2$?*</u>

Ahora se procederá con la demostración matemática dela energía relativista (K es la energía cinética). Para ello empezaremos con demostrar $\gamma^3\beta^2 + \gamma = \gamma^3$, pero no si antes saber que u es velocidad constante:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\qquad\qquad$ $\beta = \frac{u}{c}$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(1\sqrt{1-\beta^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{-\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{1^2-\beta^2}$$

$$= \frac{\frac{-\left(\beta\frac{d\beta}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2} = \frac{\frac{\left(-2\beta\frac{d\beta}{dt}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{\beta\frac{d\beta}{dt}}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)(1-\beta^2)} = \frac{\beta\frac{d\beta}{dt}}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} = \beta\frac{d\beta}{dt}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} = \beta\gamma^3\frac{d\beta}{dt}$$

$$\gamma^3\beta^2 + \gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3\beta^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta^2\gamma^2 + 1) = \gamma\left[\beta^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \gamma\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1(1-\beta^2)}{1-\beta^2}\right) = \gamma\left(\frac{\beta^2 + 1 - \beta^2}{1-\beta^2}\right) = \gamma\gamma^2 = \gamma^3$$

$\frac{d\gamma}{dt} = \beta\gamma^3 \frac{d\beta}{dt}$ $\gamma^3\beta^2 + \gamma = \gamma^3$

Habiendo deducido esto matemáticamente, toca pasar a la demostración matemática de la energía cinética:

$$K = \int_0^x F\,dx = \int_0^x \frac{dp}{dt}\,dx =$$
$$= \int_0^t \frac{d(mv)}{dt}\,vdt =$$
$$= \int_0^t m\frac{dv}{dt}\,vdt = \int_0^v mv\,dv = m\int_0^v \frac{v^{1+1}}{1+1} = m\left[\frac{mv^2}{2} - \frac{m0^2}{2}\right] = \frac{1}{2}mv^2$$

Ahora a ese cálculo matemático anterior, se le añade el factor de contracción del espacio:

$$K = \int_0^x F\,dx = \int_0^x \frac{dp}{dt}\,dx$$
$$= \int_0^t \frac{dp}{dt}\,vdt$$
$$= \int_0^t \frac{d(\gamma mv)}{dt}\,vdt = m\int_0^t \left(\frac{d\gamma}{dt}\,v + \gamma\frac{dv}{dt}\right)\,vdt = \int_0^t \left(\frac{d\gamma}{dt}\,v^2 + \gamma\frac{dv}{dt}\,v\right)\,dt$$

Se introduce el operador de c^2y m_0 la velocidad v se sustituye por β:

$$K = mc^2\int_0^t \frac{d\gamma}{dt}\,\beta^2\,dt + \int_0^t \gamma\frac{d\beta}{dt}\,\beta dt$$

Ahora se aplica esta relación que es $\left(\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = \gamma^3\beta\,\frac{d\beta}{dt}\right)$ y sustituyendo en el caso adecuado:

$$K = m_0c^2\int_0^t \left(\frac{d\gamma}{dt}\beta^2 + \gamma\frac{d\beta}{dt}\beta\right)dt$$
$$= m_0c^2\int_0^t \left(\gamma^3\beta\beta^2\frac{d\beta}{dt} + \gamma\beta\frac{d\beta}{dt}\right)dt$$
$$= m_0c^2\int_0^t \left(\gamma^3\beta^3\frac{d\beta}{dt} + \gamma\beta\frac{d\beta}{dt}\right)dt$$
$$= m_0c^2\int_0^t (\gamma^3\beta^2 + \gamma)\beta\frac{d\beta}{dt}dt$$
$$= m_0c^2\int_0^t \gamma^3\beta\frac{d\beta}{dt}dt = m_0c^2\int_0^t \frac{d\gamma}{dt}\,dt = m_0c^2\int_0^\gamma d\gamma = m_0c^2[\gamma - 0] = m_0c^2\gamma$$

Entonces nos queda que la energía total de la partícula, es su energía intrínseca más su energía cinética:

$$E = K + m_0c^2$$

La ecuación de la masa de la partícula se define a así$\left(m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$. Por lo tanto la ecuación final es:

$$E = mc^2$$

Bibliografía:

- La teoría de la relatividad de Einstein, David Blanco Laserna. Editorial National Geographic, 2012.
- El universo tetra dimensional de Minkowski, A. A. Sazánov. Editorial. Mir Moscú, 1990.
- Calculus Volumenes I y II, Salas, Hille, Etgen. Editorial reverte, S.A. 2002
- Física Cuántica (Átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas) Eisberg y Resnick, editorial Limusa,1996